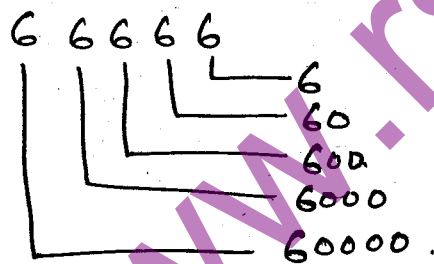


संख्याओं को लिखने के लिए 10 संकेतों 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार इन संकेतों से बनी संख्याओं की प्रणाली - हिन्दू-आरबिक संख्या प्रणाली अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य है। इस संख्या प्रणाली को हम दाशमिक प्रणाली कहते हैं।

दाशमिक प्रणाली की यह विशेषता होती है कि इसमें संख्याएं लिखने में 10 अंकों का प्रयोग होता है तथा दाईं ओर से बाईं ओर क्रमशः इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दस हजार, लाख, दस लाख, करोड़, 10 करोड़ आदि स्थान होते हैं। इकाई से बाईं ओर जितना बढ़ते हैं उतना ही अंकों के मान में दस गुणा वृद्धि होती है। जैसे

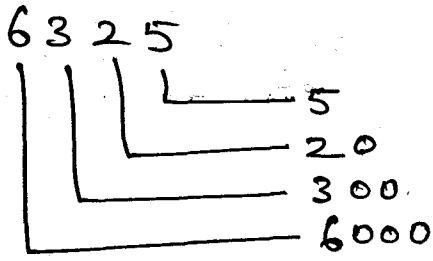


अंकों के मान

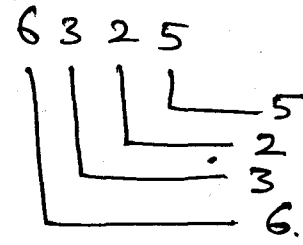
किसी भी संख्या के प्रत्येक अंक के दो मान होते हैं एक वास्तविक मान (शुद्ध मान, जातिमान, अंकित मान) तथा दूसरा स्थानीय मान।

वास्तविक मान हमेशा एक ही रहता है वह कभी नहीं बदलता लेकिन स्थानीय मान स्थान की स्थिति के कारण बदल जाता है जैसे 5630 में 5 का वास्तविक मान 5 है तथा स्थानीय मान 5000 है।

स्थानीय मान



जातीय मान

गणना प्रणाली

① भारतीय गणना प्रणाली :- इस गणना प्रणाली को हिन्दू अश्विक प्रणाली भी कहा जाता है।

इकाई	[इकाई	-----	1
		दहाई	-----	10
		सैकड़ा	-----	100
हजार	[हजार	-----	1000
		दस हजार	-----	10,000
लाख	[लाख	-----	1,00,000
		दस लाख	-----	10,00,000
करोड़	[करोड़	-----	1,00,00,000
		दस करोड़	-----	10,00,00,000

संख्या 20, 16, 35, 518 को इस प्रणाली में बीस करोड़, सोलह लाख, पैंतीस हजार पांच सौ अठारह पढ़ा जाता है।

② अन्तराष्ट्रीय गणना प्रणाली :- इस संख्या प्रणाली

को ब्रिटिश प्रणाली भी कहा जाता है। इस प्रणाली में तीन-तीन अंकों के समूह निश्चित किए गए हैं। यह प्रणाली विश्व में सबसे अधिक प्रचलित है।

संख्या 20, 16, 35, 518 को इस प्रणाली में 20 मिलियन 16 लाख 35 हजार पांच सौ अठारह पढ़ा जाता है।

इकाई	ईकाई	_____	1
	दहाई	_____	10
	सैकड़	_____	100
हजार	हजार	_____	1,000
	दस हजार	_____	10,000
	सौ हजार	_____	100,000
मिलियन	मिलियन	_____	1,000,000
	दस मिलियन	_____	10,000,000
	सौ मिलियन	_____	100,000,000

संख्याओं का प्रसारित रूप

$$8756 = 8000 + 700 + 50 + 6$$

आरोही क्रम :- आरोही क्रम में सबसे पहले सबसे छोटी संख्या आती है उसके बाद उससे बड़ी फिर उससे बड़ी तथा अन्त में सबसे बड़ी संख्या आती है।

अवरोही क्रम :- अवरोही क्रम में सबसे पहले सबसे बड़ी संख्या आती है उसके बाद उससे छोटी फिर उससे छोटी तथा अन्त में सबसे छोटी संख्या आती है।

संख्याओं के प्रकार

① प्राकृत संख्याएं - गणना के लिए प्रयोग में आने वाली संख्याएं प्राकृत संख्याएं कहलाती हैं।
जैसे - 1, 2, 3, 4, 5 - - - - -

② पूर्ण संख्याएं - यदि प्राकृत संख्याओं में शून्य को मिला लिया जाए तो ऐसी संख्याओं के

समूह को हम पूर्ण संख्याएं कहते हैं जैसे -

0, 1, 2, 3, 4, ...

- ③ पूर्णांक - पूर्ण संख्याओं के समूह में यदि हम तृणात्मक संख्याएं भी शामिल कर लें तों यह पूर्णांक संख्याओं का समूह बन जाता है। जैसे -
 ----- -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 -----
- ④ सम संख्याएं :- ऐसी संख्याएं जो 2 से पूर्ण विभाजित हो सम संख्याएं कहलाती हैं। जैसे → 2, 4, 6, 8, ...
- ⑤ विषम संख्याएं :- ऐसी संख्याएं जो 2 से पूर्ण विभाजित न हो विषम संख्याएं कहलाती हैं। जैसे → 1, 3, 5, 7, ...
- ⑥ भाज्य संख्याएं :- जिन संख्याओं के दो से अधिक गुणखंड हो भाज्य संख्याएं कहलाती हैं जैसे -
 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 21, ...
- ⑦ अभाज्य संख्याएं :- जिन संख्याओं के केवल दो ही गुणखंड हो (1 तथा स्वयं संख्या) अभाज्य संख्याएं कहलाती हैं जैसे → 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...
- ⑧ परिमैय संख्याएं :- ऐसी सभी संख्याएं जिन्हें हम $\frac{p}{q}$ के रूप में लिख सकते हैं वे संख्याएं परिमैय संख्याएं कहलाती हैं। जैसे → 5, $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{8}$, $-\frac{6}{7}$... आदि
 (यहां पर $q \neq 0$ होगा)
- ⑨ अपरिमैय संख्याएं :- ऐसी सभी संख्याएं जिन्हें हम $\frac{p}{q}$ के रूप में नहीं लिख सकते वे अपरिमैय संख्याएं कहलाती हैं जैसे - $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, π , e आदि।

Note:- e का मान 2.7 होता है यानि $\frac{27}{10}$ होता है (5)
 ग का मान $\frac{22}{7}$ होता है

यहां पर e तथा ग अपरिमेय संख्याएं हैं
 लेकिन $\frac{27}{10}$ तथा $\frac{22}{7}$ परिमेय संख्याएं हैं। क्योंकि
 $\frac{27}{10}$ तथा $\frac{22}{7}$ इनका सन्निकट मान है।

(10) पूर्ण वर्ग संख्याएं :- ऐसी संख्याएं जिनका वर्गमूल ज्ञात किया जा सकता है, पूर्ण वर्ग संख्याएं कहलाती हैं जैसे $\rightarrow 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

(11) परिपूर्ण संख्याएं :- ऐसी संख्याएं जिसके अभाज्य गुणखण्डों का योग संख्या के बराबर हो वह परिपूर्ण संख्याएं कहलाती हैं जैसे
 $6 = 1 \times 2 \times 3$
 $6 = 1 + 2 + 3$

परीक्षा की दृष्टि से महत्वपूर्ण परिणाम

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} \text{ का योज्य प्रतिलोम } -\frac{x}{y} \text{ होता है} \\ -\frac{x}{y} \text{ का योज्य प्रतिलोम } \frac{x}{y} \text{ होगा} \end{array} \right]$ केवल -ve से गुणा करेंगे

$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} \text{ का गुणात्मक प्रतिलोम } \frac{b}{a} \text{ होता है} \\ x \text{ का गुणात्मक प्रतिलोम } \frac{1}{x} \text{ होता है।} \end{array} \right]$ केवल संख्या को डलेंगे

परिमेय संख्याओं में

$$a + b = b + a.$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

होता है।

$$a \times b = b \times a.$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$$a \times (b - c) = ab - ac$$

a का योज्य प्रतिलोम $-a$ तथा a का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a}$ होता है।

पहली n प्राकृत संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

पहली n सम संख्याओं का योग $= n(n+1)$

पहली n विषम संख्याओं का योग $= n^2$

क्रमिक n तक सम संख्याओं का योग $= \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$

क्रमिक n तक विषम संख्याओं का योग $= \left(\frac{n+1}{2} \right)^2$ होता है।

संख्याओं की विभाज्यता की जांच

- ① यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो तो वह पूरी की पूरी संख्या 2 से विभाजित हो जाती है।
- ② यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित होता है तो वह पूरी की पूरी संख्या 3 से विभाजित होगी।
- ③ यदि किसी संख्या के अन्तिम (इकाई व दहाई से बनी संख्या) दो अंको से बनी संख्या 5 से विभाजित होती है या 00 है, तो वह पूरी की पूरी संख्या 5 से विभाजित होगी।
- ④ यदि किसी संख्या के इकाई के स्थान पर 0 या 5 हो तो वह पूरी की पूरी संख्या 5 से विभाजित होगी।
- ⑤ यदि कोई संख्या 2 और 3 दोनों से विभाजित हो तो वह पूरी की पूरी संख्या 6 से विभाजित होगी।

- ⑥ यदि दी गई संख्या के अन्तिम तीन अंकों से मिलकर बनी संख्या 8 से विभाजित हो तो वह पूरी की पूरी संख्या 8 से विभाजित होगी। या अन्तिम तीन 000 हैं तो भी संख्या 8 से विभाजित होगी।
- ⑦ यदि दी गई संख्या के सभी अंकों का योग 9 से विभाजित होता है तो वह पूरी संख्या भी 9 से विभाजित होगी।
- ⑧ यदि किसी संख्या के इकाई का अंक 0 हो तो वह संख्या 10 से विभाजित होगी।
- ⑨ यदि सम स्थानों तथा विषम स्थानों के अलग-अलग योग का अन्तर या तो 0 हो या 11 से विभाजित होता हो तो वह संख्या 11 से पूर्ण विभाजित होगी।
- ⑩ यदि कोई संख्या 3 तथा 4 दोनों से विभाजित हो तो वह पूरी संख्या 12 से विभाजित हो जाएगी।
- ⑪ यदि दी गई संख्या के अन्तिम दो अंकों से बनी संख्या 25 से विभाजित हो तो वह पूरी की पूरी संख्या 25 से विभाजित होगी।
- ⑫ यदि दी गई संख्या के अंकों का योग 27 से विभाजित हो तो वह पूरी संख्या 27 से विभाजित होगी।
- ⑬ यदि दी गई संख्या के अन्तिम 3 अंकों से मिलकर बनी संख्या 125 से विभाजित हो तो वह पूरी संख्या 125 से विभाजित होगी।
- ⑭ दो अंकों की पुनरावृत्ति तीन बार हो तो वह संख्या 7 या 13 से विभाजित होगी। जैसे 565656
- ⑮ तीन अंकों की दो बार पुनरावृत्ति वाली संख्या 7, 11 और 13 से विभाजित होगी। जैसे 657657

संख्याओं के जोड़, घटा, गुणा एवं भाग

- * किसी संख्याओं को मिलाकर गिनने को जोड़ कहा जाता है।
इन संख्याओं को दो प्रकार से जोड़ा जा सकता है -

- ① स्तम्भ रूप में।
- ② पक्ति में जोड़ना।

- * जब दो या दो से अधिक संख्याएं जोड़ी जाती हैं तो उनका क्रम बदल कर यदि जोड़ी जाती है तो भी परिणाम वही रहता है।

$$a + b = b + a.$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

- * यदि किसी संख्या में शून्य जोड़ा जाता है तो इस संख्या में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

$$356 + 0 = 356$$

$$0 + 417 = 417$$

$$0 + 0 = 0.$$

- * दशमलव की संख्या को जोड़ते समय सभी दशमलव बिन्दुओं को स्तम्भ विधि में एक सीध में लेकर जोड़ते हैं जैसे

$$615.236$$

$$5.7$$

$$7005.007$$

$$6.75$$

$$\text{योग} \quad \underline{\underline{7632.693}}$$

- * भिन्नों का योग करते समय हर का लघुतम लेकर करेंगे

$$\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{28+30}{35} = \frac{58}{35}$$

$$1\frac{5}{6} + 2\frac{7}{12} = (1+2) + \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{12}\right) = 3 + \left(\frac{10+7}{12}\right) = 3 + \frac{17}{12} = 3 + 1\frac{5}{12} = 4\frac{5}{12}$$

घटाव

9

* घटाव की अवधारणा का अर्थ है कि किसी वस्तुओं के समूह में से कुछ वस्तुओं को निकाल लेना।

* घटाव की अवधारणा के तीन चरण होते हैं

① निकाल लेना

② तुलना करना

③ प्रक जोड़

* उदाहरण - जैसे सार्थक के पास 10 किताबें हैं। दो किताबें जीतू को दे दीं। अब उसके पास कुल कितनी किताबें बचीं।

* सिम्पी के पास 20 पैन हैं। गौतम के पास 8 पैन हैं। गौतम से सिम्पी के पास कितनी कम/अधिक पैन हैं।

* पिन्नी के पास 12 पैन हैं। वह कितने और पैन लाएँ कि उसके पास 25 पैन हो जाएँ।

* क्रम बदलने पर घटाव का परिणाम बदल जाता है।

$$a - b \neq +b - a$$

$$25 - 5 \neq 5 - 25$$

* यदि किसी संख्या में शून्य जोड़ा या घटाया जाय तो उस संख्या पर कोई फर्क नहीं पड़ता।

$$\text{जैसे} \rightarrow 18 + 0 = 18, \quad 29 - 0 = 29$$

* दशमलव की संख्या को घटाने समय सभी दशमलव-

बिन्दुओं को स्तम्भ विधि में एक सीध में लेकर

घटाते हैं जैसे -

$$\begin{array}{r} 673.003 \\ - 20.5475 \\ \hline 652.4555 \end{array}$$

- * भिन्नों की घटाव करते समय हर का लघुतम लेकर हल करते हैं

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{5} = \frac{30 - 28}{35} = \frac{2}{35}$$

$$3\frac{5}{6} - 2\frac{7}{12} = (3-2) + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{10-7}{12}\right) = 1 + \frac{3}{12} = 1\frac{3}{12}$$

गुणा

- * गुणा की अवधारणा से अर्थ है समान रूप से, संख्या की कितनी बार पुनरावृत्ति हुई है ? जैसे 15 की तीन बार पुनरावृत्ति ($15 + 15 + 15 = 15$ का तीन गुणा) गुणा के लिए 'x' चिन्ह का प्रयोग किया जाता है।

- * क्रम विनिमय का नियम गुणा पर लागू होता है। जैसे

$$a \times b = b \times a$$

$$3 \times 5 = 5 \times 3$$

- * जिस संख्या को गुणा किया जाता है वह गुण्य, जिस संख्या से गुणा किया जाता है वह गुणक तथा उनके परिणाम को गुणफल कहते हैं।

$$\begin{array}{r} 64 \rightarrow \text{गुण्य} \\ \times 27 \rightarrow \text{गुणक} \\ \hline 1728 \rightarrow \text{गुणफल} \end{array}$$

- * ऋणात्मक तथा धनात्मक पूर्णाकों की गुणा

$$\text{धनात्मक} \times \text{धनात्मक} = \text{धनात्मक} \rightarrow (2 \times 3 = 6)$$

$$\text{धनात्मक} \times \text{ऋणात्मक} = \text{ऋणात्मक} \rightarrow (2 \times -3 = -6)$$

$$\text{ऋणात्मक} \times \text{धनात्मक} = \text{ऋणात्मक} \rightarrow (-2 \times 3 = -6)$$

$$\text{ऋणात्मक} \times \text{ऋणात्मक} = \text{धनात्मक} \rightarrow (-2 \times -3 = 6)$$

भिन्नो की गुणा करते समय अंश की अंश के साथ तथा हर की हर के साथ गुणा करते हैं जैसे

$$\frac{7}{8} \times \frac{5}{17} = \frac{7 \times 5}{8 \times 17} = \frac{35}{136}$$

भाग

* भाग का अर्थ है हिस्से करना जैसे 20 को 5 से भाग करने का अर्थ है - यदि 20 के 5 भाग करें तो प्रत्येक हिस्सा 4 होगा।

* जिस संख्या को भाग दिया जाता है भाज्य, जिस संख्या से भाग दिया जाता है भाजक और परिणाम को भागफल कहा जाता है जैसे

$$\begin{array}{r} \text{भाजक} \overline{) \text{भाज्य}} \text{ भागफल} \\ \underline{\hspace{2em}} \\ \text{शेषफल} \end{array}$$

$$\text{भाज्य} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल}) + \text{शेषफल} \text{ होता है।}$$

* भिन्नो का भागफल

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{4}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

$$* a \div b \div c = a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c}$$

$$24 \div 6 \div 3 = 24 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

$$* a \div b \div c \div d \dots = a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c} \times \frac{1}{d} \times \dots$$

BODMAS

B = ब्रैकेट (पहले बाएँ, फिर छोटी तथा अन्त में बड़ी)

O = of (का)

D = Divide (भाग)

M = Multiply (गुणा)

A = Addition (योग या जोड़)

S = Subtraction (घटाव)

किसी भी गणितीय समस्या को हल करने के लिए उपरोक्त क्रम अपनाया जाता है।

बीजगणित के कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

$$(i) (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(ii) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(iii) a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(iv) (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(v) (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$(vi) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(vii) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(viii) a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$$

$$(ix) a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$(x) a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$(xi) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$(xii) \frac{(a^2 - b^2)}{(a-b)} = a+b, \quad \frac{(a^2 - b^2)}{(a+b)} = a-b$$